DIVISEURS DES NOMBRES ELLIPSÉPHIQUES

SYLVAIN COL

Résumé. Les propriétés multiplicatives des nombres ellipséphiques peuvent être obtenue à l'aide des moments de la série génératrice de cette suite. Nous donnons des estimations précises pour les grands moments de deux méthodes distinctes : l'une combinatoire fournit un résultat précis dans le cas réputé le plus difficile des nombres n'utilisant que les 0 et les 1 ; la seconde purement analytique fournit un résultat sans condition sur les chiffres.

1. Énoncé des résultats

Soient $r \geqslant 3$ un entier et $\mathscr{D}$ un sous-ensemble strict de $\{0, \dots, r-1\}$ dont nous notons $t := \#\mathscr{D}$ le cardinal. Nous supposons

$$2 \leqslant t \leqslant r-1 \tag{1}$$

et nous posons

$$\rho \ := \ \frac{\log t}{\log r} \in]0,1[. \tag{2}$$

Nous désignons par $W_{\mathscr{D}}$ l'ensemble des nombres ellipséphiques :

$$W_{\mathscr{D}} \ := \ \Big\{ \sum d_j r^j \ / \ \forall j, \ d_j \in \mathscr{D} \Big\} \tag{3}$$

où toutes les sommes sur j sont finies. Nous noterons aussi

$$W_{\mathscr{D}}(x) \ := \ \{n \in W_{\mathscr{D}}, \ n < x\}, \tag{4}$$

$$W_{\mathscr{D}}(x,a,q) \ := \ \{n \in W_{\mathscr{D}}, \ n < x, \ n \equiv a \mod q\}. \tag{5}$$

Différentes propriétés multiplicatives de ces entiers ont déjà été étudiées par P. Erdős, C. Mauduit et A. Sárközy [4, 5], C. Dartyge et C. Mauduit [2, 3], S. Konyagin [7] et W. D. Banks et I. E. Shparlinkski [1]. En particulier, dans [2], C. Dartyge et C. Mauduit montrent que l'étude de certains problèmes multiplicatifs se ramène à une majoration suffisamment fine de la norme L^1 sur le cercle unité de la fonction génératrice des entiers ellipséphiques. Nous notons comme eux

$$G_{\mathscr{D},N}(z) \ := \frac{1}{t^N} \sum_{n \in W_{\mathscr{D}}(r^N)} \mathrm{e}(nz) = \prod_{0 \leqslant k < N} \mathscr{U}_{\mathscr{D}}(r^k z), \tag{6}$$

où $\mathrm{e}(z) := e^{2i\pi z}$, et

$$\mathscr{U}_{\mathscr{D}}(z) \ := \ \frac{1}{t} \sum_{d \in \mathscr{D}} \mathrm{e}(dz). \tag{7}$$

Grâce à [4, théorème 4], nous savons que, si k est un entier assez grand, il existe beaucoup d'entiers ellipséphiques non divisibles par la puissance k d'un nombre premier vérifiant $(p, r(r-1)) = 1$:

Date: 26 mai 2006.

Théorème A. *Si $k > 1/\rho$, il existe une constante $c > 0$ (ne dépendant que de r et de k) telle que*

$$\begin{aligned}&\#\{n \in W_{\mathscr{D}}(x) \ / \ (p, r(r-1)) = 1 \Rightarrow p^k \nmid n\} \\ &\qquad = \#W_{\mathscr{D}}(x) \prod_{p \nmid r(r-1)} \big(1 - p^{-k}\big)\bigg(1 + O\Big(\exp\Big\{ - c\Big(\rho - \tfrac{1}{k}\Big) \log^{1/2} x\Big\}\Big)\bigg).\end{aligned}$$

Un résultat similaire avait déjà été montré par M. Filaseta et S. Konyagin dans [6].

Inversement, en autorisant suffisamment de chiffres pour que $\rho > \frac{3}{4}$ (en base dix, nous devons prendre au moins 6 chiffres), [4, Théorème 5] montre également l'existence d'entiers ellipséphiques possédant un grand facteur carré :

Théorème B. *Si $k < 1/(2(1-\rho))$, alors il existe des entiers n dans $W_{\mathscr{D}}(r^N)$ divisibles par la puissance k d'un nombre premier p avec*

$$p \gg_{k,r} \Big(\frac{N^{\rho/2}}{\log N}\Big)^{\frac{1}{(2k-1)}}.$$

Pour tout réel $m \geqslant 1$, nous définissons K_m par

$$K_m \ := \ \limsup_{N\to\infty} \big\| |G_{\mathscr{D},N}|^m \big\|_1^{\frac{1}{N}}. \tag{8}$$

Majorer les réels K_m est fondamental pour de nombreux problèmes concernant les entiers ellipséphiques. Par exemple, le Théorème 1 de [2] fournit un analogue du théorème de Bombieri-Vinogradov si nous pouvons trouver un m tel que $K_m < r^{-\frac{1}{2}}$.

Dans un premier temps nous traitons le cas $\mathscr{D} = \{0, 1\}$ qui est réputé le plus difficile, et peut-être le plus intéressant. En effet, moins $\mathscr{D}$ comporte de chiffre, plus la famille $W_{\mathscr{D}}$ est rare.

Théorème 1. *Si $\mathscr{D} = \{0, 1\}$ et $m = 2l$ est un entier pair, on a*

$$\frac{1}{r} \leqslant K_{2l} \ \leqslant \ \frac{1}{r} + 2^{-2l}\binom{2l}{l} \ < \ \frac{1}{r} + \frac{1}{\sqrt{\pi l}}. \tag{9}$$

La démonstration du Théorème 1 est essentiellement combinatoire. Dans le cas général, nous devrons mettre à profit un effet de périodicité sur les fonctions $G_{\mathscr{D},N}$ définies par (6) pour majorer K_m :

Théorème 2. *Supposons que* $\operatorname{pgcd} \mathscr{D} = 1$ *et $0 \in \mathscr{D}$ et qu'il existe une constante $A > 0$ telle que, pour tout x réel, il existe d_1 et $d_2 \in \mathscr{D}$ vérifiant*

$$\|(d_1 - d_2)x\| \geqslant A\|x\|. \tag{10}$$

Alors, pour tout réel $m \geqslant 1$, nous avons

$$\frac{1}{r} \ \leqslant \ K_m \ < \ \frac{1}{r} + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{t}}{A\sqrt{m}}. \tag{11}$$

Remarque 1. Si $\mathscr{D} = \{0, 1\}$, la constante $A := 1$ est clairement admissible. La majoration (11) fournit $K_m < \frac{1}{r} + \sqrt{\frac{\pi}{4m}}$. Le second terme de (9), résultat d'une étude approfondie du cas particulier $\mathscr{D} = \{0, 1\}$, est donc plus précis que celui de (11) d'un facteur $\frac{\pi}{\sqrt{8}}$.

Remarque 2. Les résultats des Théorèmes 1 et 2 sont intéressants lorsque m est très grand : nous pouvons alors choisir K_m aussi proche de $\frac{1}{r}$ que l'on désire.

Le Théorème 2 nécessite la détermination d'une constante A adéquate. Le Lemme 1 de [4] fournit la valeur admissible $A := \frac{1}{2(r-1)^2}$. En reprenant la démonstration de [4] et en procédant à quelques optimisations, nous améliorons ce résultat :

Théorème 3. *Soit $\mathscr{D}$ tel que* $\operatorname{pgcd}\mathscr{D} = 1$. *Notons δ (resp. Δ) le plus petit (resp. grand) élément strictement positif de $\mathscr{D} - \mathscr{D}$. Dans le Théorème 2, nous pouvons choisir*

$$A := \frac{2}{\delta+\Delta} > \frac{1}{r-1}. \tag{12}$$

*Sous les hypothèses du théorème 2 (*i.e. $\operatorname{pgcd}\mathscr{D} = 1$ *et* $0 \in \mathscr{D}$*), nous avons*

$$\frac{1}{r} \leqslant K_m < \frac{1}{r} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{\pi(r+1)^3}{m}}. \tag{13}$$

Dans [4, Problème 2, p. 104] les auteurs demandent pour $\mathscr{D} = \{0,1\}$ de trouver des nombres ellipséphiques divisibles par le carré de grands nombres premiers : est-il vrai que si $r \geqslant 3$, il existe une constante $c = c_r > 0$ telle qu'une infinité d'entiers n dont tous les chiffres sont 0 ou 1 en base r possèdent au moins un facteur premier p vérifiant $p > n^c$ et $p^2 \mid n$?

M.Filaseta et S. Konyagin dans [6] ont répondu positivement à cette question si $r \leqslant 5$. C. Dartyge et C. Mauduit dans [2] ont étendu le domaine de validité à $r \leqslant 8$. S. Konyagin dans [7, corollaire 6] fournit une réponse sans condition sur r, mais sa méthode ne permet pas d'obtenir une estimation du nombre d'entiers ellipséphiques possédant un facteur premier de ce type. Le Théorème 4 ci-dessous répond positivement à cette question pour tout $r \geqslant 3$ et l'étend à tout ensemble $\mathscr{D}$ contenant 0. En outre, le Théorème 4 montre que la proportion de ces entiers est de l'ordre de grandeur attendu.

Théorème 4. *On suppose que $0 \in \mathscr{D}$, $r \geqslant 3$ et $k \geqslant 2$. Il existe une constante $c = c_{k,r} > 0$ telle que, uniformément pour $2 \leqslant y \leqslant x^c$,*

$$\#\big\{n \in W_{\mathscr{D}}(x) \ / \ \exists p \in [y, 2y[,\ p^k \mid n\big\} \geqslant \frac{k}{2^k}\frac{\#W_{\mathscr{D}}(x)}{y^{k-1}\log x}\big\{1 + O_k(\frac{1}{\log y})\big\}.$$

Une valeur admissible de la constante $c_{k,r}$ est donnée par la formule

$$c_{k,r} = \frac{32}{\pi}\frac{(r^{1/2k}-1)^2}{k(r+1)^5}. \tag{14}$$

Si $\mathscr{D} = \{0,1\}$ et $k = 2$, nous pouvons prendre

$$c = \frac{\pi}{8}r^{-\frac{3}{2}}\Big(1 - 2r^{-\frac{1}{4}}\Big). \tag{15}$$

La démonstration du Théorème 4 repose de manière cruciale sur la majoration (9) dans le cas $\mathscr{D} = \{0,1\}$, et sur la majoration (11) combinée avec (12) dans le cas général.

2. Moyenne de la fonction $G_{\mathscr{D},N}$

2.1. **Définition de la constante K_m.**

Dans toute la suite nous étendons la définition de la fonction $G_{\mathscr{D},N}$ en posant pour tout réel $\mu \geqslant 0$, $G_{\mathscr{D},\mu} = G_{\mathscr{D},\lfloor\mu\rfloor}$. Ce prolongement permet d'exprimer K_m de la manière suivante

Lemme 1. *On a*

$$K_m = \limsup_{\mu\to\infty} \big\| |G_{\mathscr{D},\mu}|^m \big\|_1^{\frac{1}{\mu}}. \tag{16}$$

Démonstration. Nous écrivons pour $\mu \geqslant 1$,

$$\big\||G_{\mathscr{D},\mu}|^m\big\|_1^{\frac{1}{\mu}} = \Big(\big\||G_{\mathscr{D},\lfloor\mu\rfloor}|^m\big\|_1^{\frac{1}{\lfloor\mu\rfloor}}\Big)^{\lfloor\mu\rfloor/\mu},$$

et en passant à la limite supérieure dans les deux membres, nous obtenons le résultat en vertu de la définition (8). □

Avant de nous concentrer sur la majoration de K_m, étape clef de notre étude, nous allons, pour illustrer la qualité des estimations que nous obtiendrons, donner une minoration simple et utile de K_m :

Lemme 2. *Pour tout réel $m \geqslant 1$, nous avons*

$$K_m \geqslant \frac{1}{r}.$$

Démonstration. Nous écrivons

$$\mathscr{U}_{\mathscr{D}}(x) - 1 = \frac{1}{t}\sum_{d\in\mathscr{D}}(\mathrm{e}(dx) - 1).$$

En utilisant l'inégalité $|\mathrm{e}(x) - 1| \leqslant 2\pi\,|x|$ nous obtenons

$$|\mathscr{U}_{\mathscr{D}}(x) - 1| \leqslant \frac{1}{t}\sum_{d\in\mathscr{D}} 2\pi d\,|x| \leqslant 2\pi r\,|x|\,.$$

Ainsi pour $|x| \leqslant \frac{1}{N}$,

$$\big|\mathscr{U}_{\mathscr{D}}(x)\big| \geqslant 1 - \frac{2\pi r}{N}.$$

Si $0 < x < \frac{1}{N}r^{-N}$, alors $0 < r^k x < \frac{1}{N}$ pour $0 \leqslant k < N$, donc

$$\big|G_{\mathscr{D},N}(x)\big| \;=\; \prod_{0\leqslant k<N}\big|\mathscr{U}_{\mathscr{D}}(r^k x)\big| \geqslant \big(1 - \frac{2\pi r}{N}\big)^N.$$

Nous en déduisons la minoration

$$\begin{aligned}
\Big(\int_0^1 \big|G_{\mathscr{D},N}(x)\big|^m \mathfrak{d}x\Big)^{\frac{1}{N}} &\geqslant \Big(\int_0^{r^{-N}/N} \big|G_{\mathscr{D},N}(x)\big|^m \mathfrak{d}x\Big)^{\frac{1}{N}}\\
&\geqslant \Big(\frac{r^{-N}}{N}\big(1 - \frac{2\pi r}{N}\big)^{mN}\Big)^{\frac{1}{N}}\\
&\geqslant \frac{1}{r}\big(1 - \frac{2\pi r}{N}\big)^m\Big(\frac{1}{N}\Big)^{\frac{1}{N}}
\end{aligned}$$

et par passage à la limite supérieure nous avons finalement

$$K_m \;=\; \limsup_{N\to+\infty}\Big(\int_0^1 \big|G_{\mathscr{D},N}(x)\big|^m dx\Big)^{\frac{1}{N}} \geqslant \frac{1}{r}.$$

□

Le lemme suivant, dont la démonstration fera l'objet du paragraphe 2.3, montre que si nous sommes capables de majorer la constante K_m pour un certain entier m, nous pourrons alors obtenir une majoration des moyennes de $G_{\mathscr{D},N}$. Un ensemble $\mathfrak{R}$ est dit δ bien espacé si $r - r' \geqslant \delta$ dès que r et r' sont deux points distincts de $\mathfrak{R}$.

Lemme 3. *Soit $\epsilon > 0$ fixé. Soit $\delta > 0$ et $\mathfrak{R}$ une famille δ bien espacée de points de $[\frac{\delta}{2}, 1 - \frac{\delta}{2}]$, globalement invariante modulo 1 par la multiplication par r. Pour tout entier m, tel que*

$$1 \leqslant m \leqslant \frac{\log r}{\log\frac{1}{\delta}}N, \tag{17}$$

nous avons

$$\sum_{x\in\mathfrak{R}}\big|G_{\mathscr{D},N}(x)\big| \;\ll_{\epsilon,m,r}\; \Big(\frac{1}{\delta}\Big)^{1+\frac{\log K_m}{\log r}+\epsilon}. \tag{18}$$

la constante implicite dépendant au plus de ϵ, m et r.

2.2. **Moyenne de la dérivée de** $(G_{\mathscr{D},N})^m$.

La constante K_m permet aussi de majorer les moyennes de la dérivée de G_N. C'est l'objectif de ce lemme :

Lemme 4. *Soit $\epsilon > 0$ fixé. Uniformément sur μ, nous avons la majoration*

$$\left\|\left(G_{\mathscr{D},\mu}{}^m\right)'\right\|_1 \ll_{\epsilon,m,r} r^\mu\left(K_m+\epsilon\right)^\mu. \tag{19}$$

Démonstration. Nous calculons la dérivée de $(G_N)^m$ comme un produit :

$$\begin{aligned} |(G_{\mathscr{D},\mu}{}^m)'(x)| &= m\,|(G_{\mathscr{D},\mu})'(x)|\,\left|G_{\mathscr{D},\mu}{}^{m-1}(x)\right| \\ &\leqslant m\sum_{k<\mu} r^k\left|\mathscr{U}_{\mathscr{D}}{}'(r^kx)\right|\left|\prod_{\substack{j<\mu\\ j\neq k}}\mathscr{U}_{\mathscr{D}}(r^jx)\right|\left|G_{\mathscr{D},\mu}{}^{m-1}(x)\right| \\ &\leqslant m\sum_{k<\mu} r^k\left|\mathscr{U}_{\mathscr{D}}{}'(r^kx)\right|\left|G_{\mathscr{D},k}{}^m(x)\right| \end{aligned}$$

puisque nous retirons des nombres de module inférieur à 1 du produit intérieur. Nous majorons trivialement la dérivée de $\mathscr{U}_{\mathscr{D}}$ par une constante ne dépendant que de $\mathscr{D}$:

$$|\mathscr{U}_{\mathscr{D}}'(y)| \leqslant 2\pi\left|\sum_{d\in\mathscr{D}} d\,\mathrm{e}(dy)\right| \leqslant 2\pi\sum_{d\in\mathscr{D}} d.$$

Donc

$$|(G_{\mathscr{D},\mu}{}^m)'(x)| \ll_r m\sum_{k<\mu} r^k\left|G_{\mathscr{D},k}{}^m(x)\right|. \tag{20}$$

Nous utilisons cette majoration pour obtenir

$$\begin{aligned} \left\|\left(G_{\mathscr{D},\mu}{}^m\right)'\right\|_1 &\ll_r m\sum_{k<\mu} r^k\left\|G_{\mathscr{D},k}{}^m\right\|_1 \\ &\ll_{r,m,\epsilon} \sum_{k<\mu} r^k\left(K_m+\epsilon\right)^k \end{aligned}$$

et comme, d'après le Lemme 2, $r(K_m+\epsilon) > 1$, on en déduit

$$\left\|\left(G_{\mathscr{D},\mu}{}^m\right)'\right\|_1 \ll_{r,m,\epsilon} \frac{r^{\lceil\mu\rceil}(K_m+\epsilon)^{\lceil\mu\rceil}}{r(K_m+\epsilon)-1} \ll_{r,m,\epsilon} r^\mu\left(K_m+\epsilon\right)^\mu,$$

ce qui termine la preuve. □

2.3. **Preuve du lemme 3.**

Lemme 5. *Soit $\mathfrak{R}$ un ensemble de points qui est globalement invariant modulo 1 par la multiplication par r. Pour tout $m \geqslant 1$ entier,*

$$\sum_{x\in\mathfrak{R}}|G_{\mathscr{D},N}(x)| \leqslant \sum_{x\in\mathfrak{R}}\left|G_{\mathscr{D},N/m}(x)\right|^m.$$

Démonstration. Nous pouvons évidemment supposer que $m \geqslant 2$. Commençons par étudier le cas où $\frac{N}{m}$ est un entier. On écrit

$$\begin{aligned} \mathscr{R}(N) := \sum_{x\in\mathfrak{R}}|G_{\mathscr{D},N}(x)| &= \sum_{x\in\mathfrak{R}}\prod_{0\leqslant k<N}\left|\mathscr{U}_{\mathscr{D}}(r^kx)\right| \\ &\leqslant \sum_{x\in\mathfrak{R}}\prod_{0\leqslant j\leqslant m-1}\prod_{\frac{j}{m}N\leqslant k<\frac{j+1}{m}N}\left|\mathscr{U}_{\mathscr{D}}(r^kx)\right|. \end{aligned}$$

L'inégalité arithmético-géométrique

$$(a_0\cdots a_{m-1})^{1/m} \leqslant \tfrac{1}{m}(a_0+\cdots+a_{m-1}),$$

appliquée avec

$$a_j = \Big(\prod_{\frac{j}{m}N \leqslant k < \frac{j+1}{m}N} \big|\mathscr{U}_{\mathscr{D}}(r^k x)\big| \Big)^m,$$

permet d'obtenir

$$\mathscr{R}(N) \leqslant \sum_{x \in \mathfrak{R}} \frac{1}{m} \sum_{0 \leqslant j \leqslant m-1} \Big(\prod_{\frac{j}{m}N \leqslant k < \frac{j+1}{m}N} \big|\mathscr{U}_{\mathscr{D}}(r^k x)\big| \Big)^m.$$

Ainsi

$$\mathscr{R}(N) \leqslant \frac{1}{m} \sum_{0 \leqslant j \leqslant m-1} \sum_{x \in \mathfrak{R}} \Big(\prod_{\frac{j}{m}N \leqslant k < \frac{j+1}{m}N} \big|\mathscr{U}_{\mathscr{D}}(r^k x)\big| \Big)^m.$$

Comme l'ensemble $\mathfrak{R}$ est stable modulo 1 par la multiplication par r, nous avons donc la majoration cherchée :

$$\mathscr{R}(N) \leqslant \frac{1}{m} \sum_{j \leqslant m-1} \sum_{x \in \mathfrak{R}} \Big(\prod_{k < \frac{N}{m}} \big|\mathscr{U}_{\mathscr{D}}(x)\big| \Big)^m.$$

Pour le cas général, si $\hat{N}$ désigne le plus grand multiple de m inférieur à N, alors nous pouvons écrire $\lfloor N/m \rfloor = \hat{N}/m$ et

$$\mathscr{R}(N) \leqslant \mathscr{R}(\hat{N}) \leqslant \sum_{x \in \mathfrak{R}} \big|G_{\mathscr{D},\hat{N}/m}(x)\big|^m = \sum_{x \in \mathfrak{R}} \big|G_{\mathscr{D},N/m}(x)\big|^m$$

ce qui termine la preuve du lemme. □

Démonstration du lemme 3. Comme $G_{\mathscr{D},N}(r)$ est le produit de fonctions de module inférieur à 1, l'application

$$\mu \mapsto |G_{\mathscr{D},\mu}(r)|$$

est pour chaque réel r décroissante. Si $\mu \leqslant \frac{N}{m}$, nous avons donc grâce au lemme 5

$$\sum_{r \in \mathfrak{R}} \big|G_{\mathscr{D},N}(r)\big| \leqslant \sum_{r \in \mathfrak{R}} \big|G_{\mathscr{D},N/m}(r)\big|^m \leqslant \sum_{r \in \mathfrak{R}} \big|G_{\mathscr{D},\mu}(r)\big|^m. \tag{21}$$

Nous majorons cette somme en utilisant le lemme de Sobolev-Gallagher énoncé dans [8, lemme 1.2] que nous rappelons ici

Lemme 6 (Sobolev-Gallagher)**.** *Soient $\delta > 0$, $\mathfrak{R}$ un ensemble δ-bien espacé de points de $[\frac{\delta}{2}, 1 - \frac{\delta}{2}]$ et f une fonction admettant une dérivée continue sur* $[0,1]$*. Alors*

$$\sum_{x \in \mathfrak{R}} |f(x)| \leqslant \delta^{-1} \|f\|_1 + \frac{1}{2} \|f'\|_1.$$

Alors, (21) devient

$$\sum_{r \in \mathfrak{R}} \big|G_{\mathscr{D},N}(r)\big| \leqslant \frac{1}{\delta} \big\|{G_{\mathscr{D},\mu}}^m\big\|_1 + \big\|\big({G_{\mathscr{D},\mu}}^m\big)'\big\|_1.$$

Le lemme 4 fournit donc pour tout $\mu \leqslant \frac{N}{m}$,

$$\begin{aligned} \sum_{r \in \mathfrak{R}} \big|G_{\mathscr{D},N}(r)\big| &\ll_{\epsilon,r} \frac{1}{\delta} \big(K_m + \epsilon\big)^\mu + m\big(r(K_m + \epsilon)\big)^\mu \\ &\ll_{\epsilon,r} m\Big(\frac{1}{\delta} + r^\mu\Big)\big(K_m + \epsilon\big)^\mu. \end{aligned}$$

Nous optimisons le paramètre μ en choisissant

$$\mu := -\frac{\log \delta}{\log r}.$$

L'hypothèse du lemme implique $\mu \leqslant \frac{N}{m}$, donc

$$\begin{aligned}\sum_{r\in\mathfrak{R}} \big|G_{\mathscr{D},N}(r)\big| &\ll_{\epsilon,m,r} \frac{1}{\delta}\big(K_m+\epsilon\big)^{\mu} \\ &\ll_{\epsilon,m,r} \Big(\frac{1}{\delta}\Big)^{1+\frac{\log(K_m+\epsilon)}{\log r}}.\end{aligned}$$

La majoration du lemme s'en déduit immédiatement puisque ce résultat est vrai pour tout $\epsilon > 0$. □

2.4. **Cardinal de $W_{\mathscr{D}}(x)$ et de $W_{\mathscr{D}}(x,a,q)$.**

Nous commençons par énoncer un résultat qui permet de limiter notre étude au cas où x est une puissance de r, *i.e.* lorsqu'il existe N tel que $x = r^N$. Des versions similaires ont déjà été exploitées par exemple par [2]. L'étude de ce cas particulier est naturelle car la moyenne des exponentielles

$$\frac{1}{t^N}\sum_{n\in W_{\mathscr{D}}(r^N)} \mathrm{e}(nz) \;=\; G_{\mathscr{D},N}(z)$$

se factorise alors complètement.

Lemme 7. *Soit $x = \sum_{N<M} x_N r^N$ décomposé dans la base r. Notons*

$$K := \max\{N < M,\ x_N \notin \mathscr{D}\}$$

*en convenant que $K = 0$ si l'ensemble est vide (*i.e. *si x est ellipséphique). Alors*

$$\#W_{\mathscr{D}}(x) \;=\; \sum_{K\leqslant N<M} \mathscr{D}(x_N)t^N, \tag{22}$$

et pour tout ensemble d'entiers $\mathscr{Q}$,

$$\sum_{q\in\mathscr{Q}}\max_{a\in\mathbb{Z}}\Big|\#W_{\mathscr{D}}(x,a,q) - \frac{\#W_{\mathscr{D}}(x)}{q}\Big| \;\leqslant\; \sum_{K\leqslant N<M} \mathscr{D}(x_N)t^N\mathscr{R}_N(\mathscr{Q}) \tag{23}$$

avec les notations

$$\mathscr{D}(y) \;:=\; \#\{d\in\mathscr{D},\ d<y\}, \tag{24}$$

$$\mathscr{R}_N(\mathscr{Q}) \;:=\; \sum_{q\in\mathscr{Q}}\frac{1}{q}\sum_{0<l<q}\Big|G_{\mathscr{D},N}\big(\frac{l}{q}\big)\Big|. \tag{25}$$

Démonstration. Nous pouvons séparer $W_{\mathscr{D}}(x)$ en deux classes : les entiers dont le premier chiffre est strictement inférieur à x_{M-1} et ceux dont le premier chiffre est égal à x_{M-1}. Si $x_{M-1} \notin \mathscr{D}$, alors

$$W_{\mathscr{D}}(x) = W_{\mathscr{D}}(x_{M-1}r^{M-1})$$

Si $x_{M-1} \in \mathscr{D}$, alors nous avons l'union disjointe

$$W_{\mathscr{D}}(x) = W_{\mathscr{D}}(x_{M-1}r^{M-1}) \sqcup \big(x_{M-1}r^{M-1} + W_{\mathscr{D}}(x - x_{M-1}r^{M-1})\big)$$

et nous pouvons appliquer de nouveau ce découpage à $x - x_{M-1}r^{M-1}$ (qui est le nombre x "privé" de son premier chiffre). À l'étape $M-K$, en notant $X_N := \sum_{N<j<M} x_j r^j$, nous obtenons l'égalité

$$W_{\mathscr{D}}(x) \;=\; \bigsqcup_{K\leqslant N<M}\big(X_N + W_{\mathscr{D}}(x_N r^N)\big).$$

L'égalité (22) s'en déduit puisque la réunion est disjointe. Nous obtenons aussi pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$\sum_{n\in W_{\mathscr{D}}(x)} \mathrm{e}(zn) \;=\; \sum_{K\leqslant N<M} \mathrm{e}(zX_N) \sum_{n\in W_{\mathscr{D}}(x_N r^N)} \mathrm{e}(zn). \tag{26}$$

La première étape pour montrer (23) est de se ramener à des sommes trigonométriques grâce à l'égalité

$$\#W_{\mathscr{D}}(x,a,q) \;=\; \sum_{n\in W_{\mathscr{D}}(x)} \frac{1}{q} \sum_{0\leqslant l<q} \mathrm{e}\Big(\frac{l(n-a)}{q}\Big)$$

En isolant le terme $l=0$:

$$\#W_{\mathscr{D}}(x,a,q) \;=\; \frac{\#W_{\mathscr{D}}(x)}{q} + \frac{1}{q}\sum_{0<l<q} \mathrm{e}\Big(-\frac{la}{q}\Big) \sum_{n\in W_{\mathscr{D}}(x)} \mathrm{e}\Big(\frac{ln}{q}\Big).$$

Nous obtenons successivement, en utilisant (26) avec $z := \frac{l}{q}$ pour la seconde majoration,

$$\begin{aligned}
\Big|\#W_{\mathscr{D}}(x,a,q) - \frac{\#W_{\mathscr{D}}(x)}{q}\Big| \;&\leqslant\; \frac{1}{q}\sum_{0<l<q}\Big|\sum_{n\in W_{\mathscr{D}}(x)} \mathrm{e}\Big(\frac{ln}{q}\Big)\Big| \\
&\leqslant\; \frac{1}{q}\sum_{0<l<q}\sum_{K\leqslant N<M}\Big|\sum_{n\in W_{\mathscr{D}}(x_N r^N)} \mathrm{e}\Big(\frac{ln}{q}\Big)\Big| \\
&\leqslant\; \sum_{K\leqslant N<M}\frac{1}{q}\sum_{0<l<q}\Big|\sum_{\substack{n_0,\dots,n_N\in\mathscr{D}\\ n_N<x_N}}\prod_{j\leqslant N} \mathrm{e}\Big(\frac{ln_j r^j}{q}\Big)\Big|
\end{aligned}$$

où $n=\sum_j n_j r^j$ est la décomposition de n en base r. Ainsi,

$$\sum_{q\in\mathscr{Q}}\Big|\#W_{\mathscr{D}}(x,a,q) - \frac{\#W_{\mathscr{D}}(x)}{q}\Big| \leqslant \sum_{q\in\mathscr{Q}}\sum_{K\leqslant N<M}\frac{1}{q}\sum_{0<l<q}\Big|\prod_{j\leqslant N}\sum_{\substack{n_j\in\mathscr{D}\\ n_N<x_N}} \mathrm{e}\Big(\frac{ln_j r^j}{q}\Big)\Big|,$$

donc en isolant le terme $j=N$ que l'on majore trivialement par $\mathscr{D}(x_N)$,

$$\begin{aligned}
\sum_{q\in\mathscr{Q}}\Big|\#W_{\mathscr{D}}(x,a,q) - \frac{\#W_{\mathscr{D}}(x)}{q}\Big| \;&\leqslant\; \sum_{q\in\mathscr{Q}}\sum_{K\leqslant N<M}\mathscr{D}(x_N)t^N\frac{1}{q}\sum_{0<l<q}\Big|G_{\mathscr{D},N}\big(\frac{l}{q}\big)\Big| \\
&\leqslant\; \sum_{K\leqslant N<M}\mathscr{D}(x_N)t^N\mathscr{R}_N(\mathscr{Q}).
\end{aligned}$$

□

Remarque 3. En réunissant les informations de (22) et de (23), nous obtenons la majoration moins précise mais plus "explicite" : pour tout $\epsilon>0$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{q\in\mathscr{Q}}\max_{a\in\mathbb{Z}}\Big|\#W_{\mathscr{D}}(x,a,q) - \frac{\#W_{\mathscr{D}}(x)}{q}\Big| \\
&\qquad\leqslant\; \#W_{\mathscr{D}}(x)\left(\sup_{(1-\epsilon)M\leqslant N<M}\big(\mathscr{R}_N(\mathscr{Q})\big) + \frac{t^3}{t-1}\frac{\#\mathscr{Q}}{x^{\rho\epsilon}}\right) \qquad (27)
\end{aligned}$$

Démonstration de (27). Majorons le membre de droite de (23) :

$$\begin{aligned}
&\sum_{K\leqslant N<M}\mathscr{D}(x_N)t^N\mathscr{R}_N(\mathscr{Q}) \\
&\qquad\leqslant\; \sum_{\max\{K,(1-\epsilon)M\}\leqslant N<M}\mathscr{D}(x_N)t^N\mathscr{R}_N(\mathscr{Q}) + \sum_{N<(1-\epsilon)M}\mathscr{D}(x_N)t^N\mathscr{R}_N(\mathscr{Q}) \\
&\qquad\leqslant\; \#W_{\mathscr{D}}(x)\sup_{(1-\epsilon)M\leqslant N<M}\mathscr{R}_N(\mathscr{Q}) + \frac{t}{t-1}\,(\#\mathscr{Q})\;t^{M-\epsilon M+1}
\end{aligned}$$

en remplaçant $\mathscr{R}_N(\mathscr{Q})$ par sa borne supérieure dans le premier terme et par $\#\mathscr{Q}$ dans le second. Comme $r^{M-1}\leqslant x<r^M$, nous avons $t^{M-1}\leqslant\#W_{\mathscr{D}}(x)$ et $t^{-M\epsilon}<x^{-\rho\epsilon}$, ce qui permet de terminer la preuve de (27). □

2.5. **Réduction de la preuve du Théorème 4.**

Nous montrons comment une bonne majoration de K_m et le lemme 3 permet de démontrer le Théorème 4.

Lemme 8. *Soient $r \geqslant 3$, $k \geqslant 2$ et m un entier pair tel que*

$$r^{2k-1} {K_m}^{2k} \ < \ 1. \tag{28}$$

Soit $c > 0$ un réel vérifiant

$$\begin{aligned} c \ &> \ \tfrac{2k-1}{\rho} && \text{si } tK_m^{\frac{1}{m}} \leqslant 1 \ ; \\ c \ &> \ 2km - \frac{1}{\rho}\left(1 - 2k - 2k\frac{\log K_m}{\log r}\right) && \text{sinon.} \end{aligned}$$

Alors uniformément pour $2 \leqslant y \leqslant x^{\frac{1}{c}}$, on a

$$\#\big\{n \in W_{\mathscr{D}}(x),\ \exists p^k \mid n,\ y \leqslant p < 2y\big\} \ \geqslant \ \frac{k}{2^k}\frac{\#W_{\mathscr{D}}(x)}{y^{k-1}\log x}\Big(1 + O(\frac{1}{\log y})\Big).$$

Démonstration. Soit $2 \leqslant y \leqslant x^{\frac{1}{c}}$. En notant $\nu_p(n)$ la valuation p-adique de n, on a pour tout entier n :

$$n \ \geqslant \ \prod_{\substack{p|n \\ p\geqslant y \\ \nu_p(n)\geqslant k}} p^{\nu_p(n)} \ \geqslant \ \prod_{\substack{p|n \\ p\geqslant y \\ \nu_p(n)\geqslant k}} y^k \ = \ \prod_{\substack{p^k|n \\ p\geqslant y}} y^k \ = \ y^{k\#\{p\geqslant y,\ p^k|n\}}.$$

Ainsi

$$\#\{p \geqslant y,\ p^k \mid n\} \leqslant \frac{\log n}{k\log y},$$

et donc

$$\begin{aligned} &\#\big\{n \in W_{\mathscr{D}}(x)\ /\ \exists p^k \mid n,\ y \leqslant p < 2y\big\} \\ &\quad\geqslant \ \frac{k\log y}{\log x}\sum_{n\in W_{\mathscr{D}}(x)}\sum_{\substack{y\leqslant p<2y \\ p^k|n}} 1 \ = \ \frac{k\log y}{\log x}\sum_{y\leqslant p<2y}\#W_{\mathscr{D}}(x,0,p^k) \\ &\quad\geqslant \ \frac{k\log y}{\log x}\sum_{y\leqslant p<2y}\frac{\#W_{\mathscr{D}}(x)}{p^k} - \sum_{y\leqslant p<2y}\Big|\frac{\#W_{\mathscr{D}}(x)}{p^k} - \#W_{\mathscr{D}}(x,0,p^k)\Big| \\ &\quad\geqslant \ \frac{k\log y}{\log x}\sum_{y\leqslant p<2y}\frac{\#W_{\mathscr{D}}(x)}{p^k} - \sum_{K\leqslant N<M}\mathscr{D}(x_N)t^N\mathscr{R}_N(\mathscr{Q}_y) \end{aligned} \tag{29}$$

en appliquant le Lemme 7 énoncé et prouvé dans le paragraphe précédant, avec le choix de $\mathscr{Q}_y := \{p^k,\ y \leqslant p < 2y\}$. En utilisant le théorème des nombres premiers, nous vérifions que le terme principal dans (29) est supérieur à

$$\frac{k}{2^k}\frac{\#W_{\mathscr{D}}(x)}{y^{k-1}\log x}\Big(1 + 0(\frac{1}{\log y})\Big)$$

Une meilleure constante peut être obtenue en évaluant cette somme plus précisément. La preuve sera donc terminée dès que nous aurons montré

$$\sum_{K\leqslant N<M}\mathscr{D}(x_N)t^N\mathscr{R}_N(\mathscr{Q}_y) \ \ll \ \frac{\#W_{\mathscr{D}}(x)}{y^{k-1}\log^2 x}, \tag{30}$$

la constante implicite pouvant dépendre des paramètres r, t, k, m ou c.

Nos appliquons le lemme 3 à l'ensemble y^{-2k} bien espacé

$$\mathfrak{R} \ := \ \big\{\tfrac{l}{p^k},\ 0 < l < p^k,\ y \leqslant p < 2y\big\}. \tag{31}$$

Si y est assez grand, par exemple $y > r$, tout nombre premier $p \in [y, 2y[$ est premier avec r donc le lemme de Gauß assure que $\mathfrak{R}$ est bien globalement invariant modulo 1 par la multiplication par r. Dès que

$$m \leqslant \frac{\log r}{2k \log y} N, \tag{32}$$

nous avons d'après (18)

$$\begin{aligned} \mathscr{R}_N(\mathscr{Q}_y) &\leqslant \frac{1}{y^k} \sum_{y \leqslant p < 2y} \sum_{0 < l < p^k} \Big| G_{\mathscr{D},N}\big(\frac{l}{p^k}\big) \Big| \\ &\ll_\epsilon y^{-k} m \big(y^{2k}\big)^{1+\frac{\log(K_m+\varepsilon)}{\log r}} \\ &\ll_{\epsilon,m} \big(y^k\big)^{1+2\frac{\log(K_m+\varepsilon)}{\log r}}. \end{aligned} \tag{33}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} &\sum_{K \leqslant N < M} \mathscr{D}(x_N) t^N \mathscr{R}_N(\mathscr{Q}_y) \\ &\qquad \ll_{\epsilon,m} \sum_{K \leqslant N < M} \mathscr{D}(x_N) t^N y^{k(1+2\frac{\log(K_m+\varepsilon)}{\log r})} + \sum_{N < 2km\frac{\log y}{\log r}} t^{N+1} y^k (K_m+\varepsilon)^{\frac{N}{m}}, \end{aligned}$$

la seconde majoration étant obtenue en appliquant le lemme 3 avec le choix de

$$m := \frac{\log r}{2k \log y} N$$

pour que notre hypothèse sur m soit vérifiée.

La première somme s'évalue grâce à (22), tandis que la seconde se calcule comme somme d'une série géométrique de raison $t(K_m+\varepsilon)^{\frac{1}{m}}$. Traitons en détail le cas le plus compliqué où $tK_m{}^{\frac{1}{m}} > 1$:

$$\sum_{K \leqslant N < M} \mathscr{D}(x_N) t^N \mathscr{R}_N(\mathscr{Q}_y) \leqslant \Big(\# W_{\mathscr{D}}(x) + \frac{t^2 (K_m+\varepsilon)^{\frac{1}{m}}}{t(K_m+\varepsilon)^{\frac{1}{m}} - 1} y^{2km\rho} \Big) y^{k(1+2\frac{\log(K_m+\varepsilon)}{\log r})}.$$

Comme $y \leqslant x^{\frac{1}{c}}$, la condition (30) est vraie dès que (quitte à choisir ε assez petit) :

$$\begin{aligned} 2km\rho + k(1 + 2\frac{\log K_m}{\log r}) &< c\rho + 1 - k, \\ k(1 + 2\frac{\log K_m}{\log r}) &< 1 - k. \end{aligned}$$

Ces conditions sur c et sur K_m sont exactement celles imposées dans l'énoncé du Lemme 8. □

Remarque 4. Nous ne parviendrons pas à obtenir de majoration de K_m suffisamment précise pour être dans le cas $tK_m{}^{\frac{1}{m}} \leqslant 1$. Il est d'ailleurs probable que cette condition soit impossible. Si $tK_m{}^{\frac{1}{m}} > 1$, l'hypothèse (28) montre que le choix de $c = 2km$ est acceptable.

Remarque 5. Notre méthode permet aussi d'obtenir une majoration du nombre d'entiers ellipséphiques divisibles par une puissance d'un grand nombre premier en partant de la majoration

$$\#\{n \in W_{\mathscr{D}}(x),\ \exists p^k \mid n,\ y \leqslant p \leqslant 2y\} \leqslant \sum_{n \in W_{\mathscr{D}}(x)} \sum_{\substack{y \leqslant p \leqslant 2y \\ p^k \mid n}} 1.$$

2.6. **Encadrement de K_m pour $\mathscr{D} = \{0,1\}$.**

Nous prouvons dans cette partie le Théorème 1 par une méthode essentiellement combinatoire : nous interprétons K_m comme le nombre de solutions d'une équation et nous dénombrons par récurrence ces solutions.

Lemme 9. *Pour $\beta \in \mathbb{Z}$, notons $X_N(\beta)$ le nombre de solutions dans $W_{\mathscr{D}}(r^N)$ de l'équation*

$$n_1 + \cdots + n_l \;=\; m_1 + \cdots + m_l + \beta r^N. \tag{34}$$

Pour $N = 0$, nous convenons que $X_0(\beta) = 1$ si $\beta = 0$ et 0 sinon. Alors

$$\left\| {G_{\mathscr{D},N}}^{2l} \right\|_1 \;=\; t^{-2lN} X_N(0) \tag{35}$$

et $X_N(\beta)$ se calcule grâce à la relation de récurrence

$$X_{N+1}(\beta) = \sum_{|j| < \frac{l}{r-1}} \binom{2l}{l + j - \beta r} X_N(j), \tag{36}$$

Démonstration. Pour prouver (35), il suffit de remarquer qu'en développant le produit, nous avons

$$\begin{aligned} t^{2lN} \left\| {G_{\mathscr{D},N}}^{2l} \right\|_1 &= \int_0^1 \Big(\sum_{n \in W_{\mathscr{D}}(r^N)} \mathrm{e}(nu) \Big)^l \Big(\sum_{m \in W_{\mathscr{D}}(r^N)} \mathrm{e}(-mu) \Big)^l \mathfrak{d}u \\ &= \int_0^1 \sum_{\substack{n_1,\dots,n_l \in W_{\mathscr{D}}(r^N) \\ m_1,\dots,m_l \in W_{\mathscr{D}}(r^N)}} \mathrm{e}((n_1 + \cdots + n_l - m_1 - \cdots + m_l)u) \mathfrak{d}u \\ &= \sum_{\substack{n_1,\dots,n_l \in W_{\mathscr{D}}(r^N) \\ m_1,\dots,m_l \in W_{\mathscr{D}}(r^N)}} \int_0^1 \mathrm{e}((n_1 + \cdots + n_l - m_1 - \cdots + m_l)u) \mathfrak{d}u \end{aligned}$$

et l'intégrale vaut 1 ou 0 suivant que $n_1 + \cdots + n_l = m_1 + \cdots + m_l$ ou pas. Nous comptons donc exactement le nombre de solutions dans $W_{\mathscr{D}}(r^N)$ de l'équation

$$n_1 + \cdots + n_l \;=\; m_1 + \cdots + m_l,$$

ce qui est la définition de $X_N(0)$.

Pour prouver (36), décomposons les nombres ellipséphiques de $W_{\mathscr{D}}(r^{N+1})$ en isolant leur chiffre d'indice N :

$$\begin{aligned} n_k &= d_k r^N + \hat{n}_k & &\text{avec } d_k \in \mathscr{D} \text{ et } \hat{n}_k \in W_{\mathscr{D}}(r^N)\ ; \\ m_k &= e_k r^N + \hat{m}_k & &\text{avec } e_k \in \mathscr{D} \text{ et } \hat{m}_k \in W_{\mathscr{D}}(r^N). \end{aligned}$$

Alors $n_1 + \cdots + n_l = m_1 + \cdots + m_l + \beta r^{N+1}$ si et seulement si

$$\Big(\sum_k d_k \Big) r^N + \sum_k \hat{n}_k \;=\; \Big(\sum_k e_k \Big) r^N + \sum_k \hat{m}_k + \beta r^{N+1}$$

si et seulement s'il existe $j \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\sum_k \hat{n}_k \;= \sum_k \hat{m}_k + j r^N \tag{37}$$

et

$$\sum_k d_k \;=\; \sum_k e_k + \beta r - j. \tag{38}$$

Pour chaque j, nous avons donc $X_N(j)$ choix possibles pour les $\hat{n}_k$ et $\hat{m}_j$ et nous avons $\binom{2l}{l+\beta r - j}$ choix pour les d_k et e_k. Comme $\mathscr{D} = \{0,1\}$, le nombre de solutions de l'équation (38) est en effet

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} \binom{l}{i}\binom{l}{l+\beta r-j} = \binom{2l}{l+\beta r-j}.$$

Cette relation se démontre par exemple en identifiant les coefficients de $x^{l+\beta r-j}$ du polynôme $(1+x)^l(1+x)^l = (1+x)^{2l}$ développé par la formule du binôme de Newton.

Remarquons aussi que l'égalité (37) impose $|j| < \frac{l}{r-1}$ puisque nous avons les encadrements

$$0 \leqslant \sum_k \hat{n}_k \leqslant l\frac{r^N-1}{r-1}, \quad 0 \leqslant \sum_k \hat{m}_k \leqslant l\frac{r^N-1}{r-1}.$$

Ainsi,

$$X_{N+1}(\beta) = \sum_{|j|<\frac{l}{r-1}} \binom{2l}{l+j-\beta r} X_N(j), \tag{39}$$

ce qui termine la preuve du lemme. □

Lemme 10. *Pour tout $N \geqslant 0$, $l \geqslant 1$ et $r \geqslant 3$ des entiers,*

$$K_{2l} \leqslant \frac{1}{r}\sum_{0\leqslant n<r} \cos^{2l}\left(\pi\frac{n}{r}\right) < \frac{1}{r} + 2^{-2l}\binom{2l}{l}. \tag{40}$$

Démonstration. Posons $k := \lceil \frac{l}{r-1} \rceil$. Notons

$$X_N := \begin{pmatrix} X_N(1-k) \\ \vdots \\ X_N(k-1) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2k-1}$$

et M la matrice définie par

$$M = \left[\binom{2l}{l-ir+j}\right]_{-k<i,j<k}$$

de sorte que $X_{N+1} = MX_N$.

Munissons $\mathbb{R}^{2k-1}$ de la norme 1 et $M_{2k-1}(\mathbb{R})$ de la norme qui lui est subordonnée,

$$\|M\| := \max_{|j|<k}\Big\{\sum_{|i|<k} |m_{i,j}|\Big\}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |X_N(0)| \leqslant \|X_N\| &= \|M^N X_0\| \\ &\leqslant \|M\|^N \|X_0\| = \|M\|^N. \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (35), nous trouvons la première majoration

$$K_{2l} \leqslant 2^{-2l} \max_{|j|<\frac{l}{r-1}} \Big\{ \sum_{|i|<\frac{l}{r-1}} \binom{2l}{l-ir} \Big\}. \tag{41}$$

Fixons maintenant j et notons $\xi := \mathrm{e}(\frac{1}{r})$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k\equiv j[r]}\binom{2l}{l-k} &= \sum_k \frac{1}{r}\sum_{0\leqslant n<r}\xi^{(k-j)n}\binom{2l}{l-k}\\ &= \frac{1}{r}\sum_{0\leqslant n<r}\xi^{-n(j+l)}\Big(1+\xi^n\Big)^{2l}\\ &= \frac{1}{r}\sum_{0\leqslant n<r}\xi^{-nj}\Big(\xi^{\frac{n}{2}}+\xi^{-\frac{n}{2}}\Big)^{2l}\\ &\leqslant \frac{2^{2l}}{r}\sum_{0\leqslant n<r}\cos^{2l}\Big(\pi\frac{n}{r}\Big).\end{aligned}$$

En prenant le maximum sur j dans (41), nous avons démontré la première majoration du lemme. Nous majorons la somme par l'intégrale correspondante pour en déduire

$$\begin{aligned}K_{2l} &\leqslant \frac{1}{r}+\frac{1}{r}\sum_{0<n<r}\cos^{2l}\Big(\pi\frac{n}{r}\Big)\\ &< \frac{1}{r}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2l}(\pi s)\,ds\end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme 10 après le calcul de l'intégrale de Wallis. □

2.7. Encadrement de K_m pour $\mathscr{D}$ quelconque.

Le lemme 1 de [4] énonce que si $\mathscr{D}$ est un sous-ensemble de $\{0,...,r-1\}$ de cardinal au moins 2 et telle que $\operatorname{pgcd}\mathscr{D}=1$, alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, il existe $d\in\mathscr{D}$ tel que

$$\|dx\|\geqslant\frac{1}{2(r-1)^2}\|x\|.$$

Cette minoration est ensuite utilisée pour majorer $\mathscr{U}_{\mathscr{D}}$ point par point :

$$\big|\mathscr{U}_{\mathscr{D}}(x)\big| \leqslant 1-\frac{1}{(r-1)^5}\|x\|^2,$$

majoration qui peut être utilisée à son tour pour estimer K_m. Nous commençons en reprenant la preuve de la majoration de $\mathscr{U}_{\mathscr{D}}$ dans le but d'améliorer la constante obtenue : elle présentera l'avantage d'être du bon ordre de grandeur en r.

Lemme 11. *Soit $\mathscr{D}$ tel que* $\operatorname{pgcd}\mathscr{D}=1$. *Notons δ le plus petit élément non nul de $\mathscr{D}$ et Δ le plus grand. Alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, il existe $d\in\mathscr{D}$ tel que*

$$\|dx\|\geqslant\frac{2}{\delta+\Delta}\|x\|. \tag{42}$$

Démonstration. Notons $K:=\frac{2}{\delta+\Delta}$ et considérons $x\in\mathbb{R}$ tel que

$$\|\delta x\| < K\|x\|. \tag{43}$$

Nous allons montrer l'existence d'un $d\in\mathscr{D}$ vérifiant (42).

Écrivons $\delta x=m+\theta$ avec $m\in\mathbb{Z}$, et $|\theta|=\|\delta x\|\leqslant\frac{1}{2}$.

Supposons que $\delta\mid md$ pour tout $d\in\mathscr{D}$. On aurait alors

$$\delta\mid\operatorname{pgcd}(m\mathscr{D})=m\operatorname{pgcd}\mathscr{D}=m.$$

Donc $\frac{m}{\delta}$ est un entier et l'hypothèse (43) permet de calculer

$$\|x\| = \Big\|\frac{m}{\delta}+\frac{\theta}{\delta}\Big\| = \frac{|\theta|}{\delta}=\frac{\|\delta x\|}{\delta} < \frac{K}{\delta}\|x\|.$$

Comme $K\leqslant1$ et $\delta\geqslant1$, nous aboutissons à une absurdité. Par conséquent, il existe un $d\in\mathscr{D}$ tel que $\delta\nmid md$. Pour un tel $d\in\mathscr{D}$, montrons que $\|dx\|\geqslant K\|x\|$.

On écrit $dx = d\frac{m}{\delta} + d\frac{\theta}{\delta}$, donc

$$\|dx\| \;\geqslant\; \left\|\frac{dm}{\delta}\right\| - \frac{d}{\delta}|\theta|.$$

Or

$$\left\|\frac{dm}{\delta}\right\| \geqslant \frac{1}{\delta} \geqslant \frac{2\|x\|}{\delta}$$

et, à l'aide de l'hypothèse (43),

$$\frac{d}{\delta}|\theta| \;=\frac{d}{\delta}\|\delta x\| \leqslant \frac{d}{\delta}K\|x\| \;\leqslant\; \frac{\Delta}{\delta}K\|x\|$$

puisque Δ est le plus grand élément de $\mathscr{D}$. Ainsi

$$\|dx\| \;\geqslant\; \frac{2}{\delta}\|x\| - \frac{\Delta}{\delta}K\|x\|.$$

ce qui termine la preuve puisque $2/\delta - K\Delta/\delta = K$. □

Remarque 6. Montrons que la constante de (42) est du bon ordre de grandeur :

Si $\mathscr{D} = \{0, 1\}$, nous trouvons que $K = 1$, et nous ne pouvons évidemment pas faire mieux.

Si $\mathscr{D} = \{0, d_1, d_2\}$ avec $d_2 \geqslant 3$ impair et $d_1 := d_2 - 2$. Notons aussi $k := \frac{d_2-1}{2}$ et $l := d_1$ qui sont des entiers tels que

$$k(d_1 + d_2) \;=\; ld_2 + 1.$$

Pour le choix de $x := \frac{l}{d_1+d_2}$, nous avons donc

$$\begin{aligned}\|d_1x\| \;&=\; \left\|\frac{d_1}{d_2}\frac{d_2 l}{d_1+d_2}\right\| \;=\; \left\|l - k + \frac{1}{d_2} - \frac{d_1}{d_2}\frac{1}{d_1+d_2}\right\| \\ &=\; \left\|\frac{1}{d_1+d_2}\right\| \;=\; \frac{1}{d_1+d_2}, \\ \|d_2x\| \;&=\; \left\|\frac{d_2 l}{d_1+d_2}\right\| \;=\; \left\|k - \frac{1}{d_1+d_2}\right\| \;=\; \frac{1}{d_1+d_2}.\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{1}{d_1+d_2} = \dfrac{\|x\|}{d_1}$, nous avons pour tout d de $\mathscr{D}$, $\|dx\| = \dfrac{1}{d_1}\|x\|$. En choisissant $d_1 = r-3$ ou $r-4$ suivant la parité de r, nous avons bien trouvé un ensemble $\mathscr{D}$ pour laquelle la constante de (42) est presque optimale (du bon ordre de grandeur en r).

Lemme 12. *Pour tout réel y, nous avons la majoration*

$$|1 + \mathrm{e}(y)| \;\leqslant\; 2(1 - 4\|y\|^2). \tag{44}$$

Démonstration. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$ en utilisant la parité et la périodicité de la fonction étudiée. Alors

$$|1 + \mathrm{e}(y)| \;=\; 2\cos(\pi y) \;=\; 2 - 4\sin^2(\pi y/2).$$

La concavité de $z \mapsto \sin(\pi z/2)$ entre 0 et $\frac{1}{2}$ permet de la minorer cette fonction par sa corde, donc

$$\sin(\pi y/2) \geqslant \sqrt{2}\, y$$

d'où l'on déduit la majoration du lemme. □

Lemme 13. *Soit $\mathscr{D}$ une sous-ensemble de $\{0, ..., r-1\}$ de cardinal $t \geqslant 2$. Soit $A > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe d_1 et $d_2 \in \mathscr{D}$ avec $\|(d_1 - d_2)x\| \geqslant A\|x\|$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons*

$$\left|\mathscr{U}_{\mathscr{D}}(x)\right| \;\leqslant\; 1 - \frac{8A^2}{t}\|x\|^2. \tag{45}$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par hypothèse, il existe deux éléments d_1 et $d_2 \in \mathscr{D}$ tels que

$$\|(d_1 - d_2)x\| \geqslant A\|x\|. \tag{46}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |\mathscr{U}_{\mathscr{D}}(x)| &= \frac{1}{t}\Big|\sum_{d\in\mathscr{D}} \mathrm{e}(dx)\Big| \\ &\leqslant \frac{1}{t}\,|\mathrm{e}(d_1x) + \mathrm{e}(d_2x)| + \frac{t-2}{t} \\ &\leqslant 1 - \frac{2}{t} + \frac{1}{t}\,\big|1 + \mathrm{e}\big((d_1 - d_2)x\big)\big| \end{aligned}$$

en isolant les éléments de $\mathscr{D}$ correspondant à d_1 et d_2. La majoration (44) donne

$$\begin{aligned} |\mathscr{U}_{\mathscr{D}}(x)| &\leqslant 1 - \frac{2}{t} + \frac{2}{t}\Big(1 - 4\big\|(d_1 - d_2)x\big\|^2\Big) \\ &\leqslant 1 - \frac{8A^2}{t}\big\|x\big\|^2 \end{aligned}$$

en utilisant (46). □

Corollaire 1. *Soit $\mathscr{D}$ est un sous-ensemble strict de $\{0, ..., r-1\}$ de cardinal $t \geqslant 2$ contenant 0 tel que* $\operatorname{pgcd} \mathscr{D} = 1$*. Alors pour tout x réel*

$$\big|\mathscr{U}_{\mathscr{D}}(x)\big| \leqslant 1 - \frac{64}{(r+1)^3}\|x\|^2. \tag{47}$$

Démonstration. Notons $\mathscr{D}' := (\mathscr{D} - \mathscr{D}) \cap [1, +\infty[$ et δ (respectivement Δ) le plus petit (respectivement grand) élément de$\mathscr{D}'$.

Si $\delta = 1$, cela signifie qu'il existe deux éléments d_1 et d_2 dans $\mathscr{D}$ avec $d_2 = d_1+1$. L'hypothèse du lemme 13 est donc vérifiée pour le choix de $A := 1$, ce qui implique

$$\big|\mathscr{U}_{\mathscr{D}}(x)\big| \leqslant 1 - \frac{8}{t}\|x\|^2.$$

Comme $r \geqslant 3$, $r^2 + 3r - 5 \geqslant 0$, donc $r^3 + 3r^2 - 5r + 7 \geqslant 0$ ce qui se réécrit $(r+1)^3 \geqslant 8(r-1)$. Donc

$$\frac{8}{t} \geqslant \frac{8}{r-1} \geqslant \frac{64}{(r+1)^3},$$

ce qui termine la preuve de la majoration du lemme lorsque $\delta = 1$.

Si $t = 2$, comme $\mathscr{D}$ contient 0 et comme $\operatorname{pgcd} \mathscr{D} = 1$, c'est que $\mathscr{D} = \{0, 1\}$ et la majoration (47) est vraie.

Nous pouvons donc supposer que $\delta \geqslant 2$ et que $t \geqslant 3$. Comme $0 \in \mathscr{D}$, $\mathscr{D}\backslash\{0\}$ est un sous ensemble de $\mathscr{D}'$, donc $\operatorname{pgcd} \mathscr{D}' = 1$. Nous pouvons donc utiliser le lemme 11 avec $\mathscr{D}'$, ce qui permet d'appliquer la majoration du lemme 13 et d'obtenir

$$\big|\mathscr{U}_{\mathscr{D}}(x)\big| \leqslant 1 - \frac{32}{t(\delta + \Delta)^2}\|x\|^2. \tag{48}$$

L'hypothèse $0 \in \mathscr{D}$ implique aussi que
– l'ensemble $\mathscr{D}$ est δ bien espacé
– δ est inférieur au plus petit élément non nul de $\mathscr{D}$
– Δ est aussi le plus grand élément de $\mathscr{D}$.
Donc $\delta + (t-2)\delta$ est inférieur à $\Delta \leqslant r - 1$, ce qui donne

$$\delta \leqslant \frac{r-1}{t-1}. \tag{49}$$

Donc

$$t(\delta+\Delta)^2 \leqslant t\Big(\frac{r-1}{t-1}+r-1\Big)^2 \;=\; (r-1)^2\frac{t^3}{(t-1)^2} \;=: P(t).$$

Nous avons

$$P'(t) \;=\; (r-1)^2\frac{t^2(t-3)}{(t-1)^3} \geqslant 0,$$

donc P est croissante. La majoration (49) et notre hypothèse $\delta \geqslant 2$ fournit $t \leqslant \frac{r+1}{2}$, donc

$$t(\delta+\Delta)^2 \leqslant P\Big(\frac{r+1}{2}\Big) \;=\; \frac{(r+1)^3}{2}.$$

La démonstration du lemme est achevée en reportant cette estimation dans (48). □

Lemme 14. *Définissons M_m par*

$$M_m \;=\; \max_{u\in[0,1]}\frac{1}{r}\sum_{0\leqslant h<r}\Big|\mathscr{U}_{\mathscr{D}}\Big(\frac{u+h}{r}\Big)\Big|^m.$$

Alors $K_m \leqslant M_m$ pour tout $m \geqslant 1$.

Démonstration. Prenons $N \geqslant 1$ et calculons l'intégrale de ${G_{\mathscr{D},N}}^{2l}$ en découpant le segment $[0,1]$ en r sous-segments de longueur $\frac{1}{r}$:

$$\begin{aligned}
\big\|{G_{\mathscr{D},N}}^m\big\|_1 \;&=\; \sum_{0\leqslant h<r}\int_{\frac{h}{r}}^{\frac{h+1}{r}}\prod_{k<N}\Big|\mathscr{U}_{\mathscr{D}}\big(r^k s\big)\Big|^m ds\\
&=\; \sum_{0\leqslant h<r}\int_{\frac{h}{r}}^{\frac{h+1}{r}}\Big|\mathscr{U}_{\mathscr{D}}\big(s\big)\Big|^m\prod_{k<N-1}\Big|\mathscr{U}_{\mathscr{D}}\big(r^k rs\big)\Big|^m ds\\
&=\; \sum_{0\leqslant h<r}\int_0^1\Big|\mathscr{U}_{\mathscr{D}}\big(\frac{u+h}{r}\big)\Big|^m\prod_{k<N-1}\Big|\mathscr{U}_{\mathscr{D}}\big(r^k(u+h)\big)\Big|^m du\\
&=\; \sum_{0\leqslant h<r}\int_0^1\Big|\mathscr{U}_{\mathscr{D}}\big(\frac{u+h}{r}\big)\Big|^m\Big|G_{\mathscr{D},N-1}\Big|^m du
\end{aligned}$$

puisque $G_{\mathscr{D},N-1}$ est de période 1. La définition de M_m implique donc

$$\big\|{G_{\mathscr{D},N}}^m\big\|_1 \;\leqslant\; M_m\big\|{G_{\mathscr{D},N-1}}^m\big\|_1 \;\leqslant\; \dots \;\leqslant\; {M_m}^N$$

qui est un résultat plus précis que celui annoncé dans le lemme. □

Lemme 15. *Soit $B>0$ tel que, pour tout $x\in\mathbb{R}$,*

$$|\mathscr{U}_{\mathscr{D}}(x)| \;\leqslant\; 1-B\|x\|^2. \tag{50}$$

Pour tout $m\geqslant 1$,

$$M_m \;<\; \frac{1}{r}+\sqrt{\frac{\pi}{mB}}.$$

Démonstration. Utilisons notre hypothèse (50) pour majorer directement $\mathscr{U}_{\mathscr{D}}$ dans la définition de M_m. Ainsi,

$$M_m \;\leqslant\; \max_{u\in[0,1]}\frac{1}{r}\sum_{0\leqslant h<r}\Big(1-B\Big\|\frac{u+h}{r}\Big\|^2\Big)^m.$$

Mais si $u\in[0,1]$,

$$\frac{1}{r}\sum_{0\leqslant h<r}\Big(1-B\Big\|\frac{u+h}{r}\Big\|^2\Big)^m \;\leqslant\; \frac{1}{r}\sum_{-\frac{r}{2}\leqslant h\leqslant\frac{r}{2}}\Big(1-B\frac{(u+h)^2}{r^2}\Big)^m$$

puisque $\|\frac{u+h}{r}\| = \|\frac{u+h-r}{r}\|$.

Dans le membre de droite, chaque terme de la somme est une fonction concave de u. Cette somme est donc aussi une fonction concave de u. La symétrie sur h impliquant celle en u, la dérivée de cette fonction majorante s'annule donc pour $u = 0$. Le maximum du membre de droite est donc atteint pour $u = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} M_m &\leqslant \frac{1}{r} \sum_{-\frac{r}{2}\leqslant h\leqslant\frac{r}{2}} \Big(1 - \frac{B}{r^2}h^2\Big)^m \qquad (51)\\ &\leqslant \frac{1}{r} + \frac{2}{r} \sum_{1\leqslant h\leqslant\frac{r}{2}} \exp\Big(-\frac{mB}{r^2}h^2\Big) \\ &\leqslant \frac{1}{r} + \frac{2}{r}\int_0^{\frac{r}{2}} \exp\big(-\frac{mB}{r^2}s^2\big)ds \\ &< \frac{1}{r} + \frac{2}{\sqrt{mB}}\int_0^{\infty} \exp\big(-u^2\big)du \end{aligned}$$

qui est bien le résultat du lemme 15. □

3. Preuve des Théorèmes 1 à 4

3.1. **Preuve du Théorème 1.**

Les lemmes 10 et 2 donnent les inégalités (9).

3.2. **Preuve des Théorèmes 2 et 3.**

Les lemmes 13 14 et 15 donnent la majoration, le lemme 2 la minoration des inégalités (11).

Le lemme 11 fournit la preuve de (12). La majoration de (13) s'obtient en utilisant le corollaire 1 et les lemmes 14 et 15.

3.3. **Preuve du Théorème 4.**

Si m est assez grand, on a $K_m = \frac{1}{r} + O_r(\frac{1}{\sqrt{m}})$. Donc l'hypothèse (28) du Lemme 8 est vérifiée pour m assez grand (pouvant dépendre de r). Le Théorème 4 est donc vrai pour le cas général.

Il reste à montrer que les valeurs annoncées sont possibles : numériquement, en utilisant le Théorème 3, il suffit de trouver un entier pair m avec

$$m \;>\; \frac{\pi}{64}\frac{(r+1)^3r^2}{(r^{1/2k}-1)^2}.$$

Nous pouvons donc trouver un entier pair m vérifiant l'hypothèse (28) avec

$$m \;<\; \frac{\pi}{64}\frac{(r+1)^5}{(r^{1/2k}-1)^2}.$$

Finalement, nous pouvons prendre

$$c \;=\; \frac{1}{2km} \;>\; \frac{32}{\pi}\frac{(r^{1/2k}-1)^2}{k(r+1)^5},$$

ce qui termine la démonstration de (14).

Dans le cas où $\mathscr{D} = \{0, 1\}$ et $k = 2$, le Théorème 4 annonce une meilleure constante c. Pour l'obtenir, nous avons intérêt de choisir l le plus petit possible pour que l'inégalité (28) reste vraie. Le choix de

$$l := \Big\lceil \frac{r^{1.5}}{\pi} + \frac{1}{8} \Big\rceil$$

vérifie l'hypothèse (28) et permet de prendre

$$c \;=\; \frac{1}{8l} \;>\; \frac{\pi}{8} r^{-\frac{3}{2}}(1 - 2r^{-\frac{1}{4}})$$

dans (15).

Références

[1] W. D. Banks et I. E. Shparlinski, Arithmetic properties of numbers with restricted digits, *Acta Aritmetica*, 2004, 313–332.

[2] C. Dartyge et C. Mauduit, Nombres presque premiers dont l'écriture en base r ne comporte pas certains chiffres, *J. Number Theory* **81**,2 (2000), 270–291.

[3] C. Dartyge et C. Mauduit, Ensembles de densité nulle contenant des entiers possédant au plus deux facteurs premiers, *J. Number Theory* **91**,2 (2001), 230–255.

[4] P. Erdős, C. Mauduit et A. Sárközy, On arithmetic properties of integers with missing digits. I. Distribution in residue classes, *J. Number Theory* **70**,2 (1998), 99–120.

[5] P. Erdős, C. Mauduit et A. Sárközy, On arithmetic properties of integers with missing digits. II. Prime factors, *Discrete Math.* **200**,1-3 (1999), 149–164. Paul Erdős memorial collection.

[6] M. Filaseta et S. Konyagin., Squarefree values of polynomials all of whose coefficients are 0 and 1, *Acta Aritmetica*, 1996, 191–205.

[7] S. Konyagin, Arithmetic properties of integers with missing digits : distribution in residue classes, *Period. Math. Hungar.* **42**,1-2 (2001), 145–162.

[8] H. L. Montgomery, Topics in multiplicative number theory, *Lecture Notes in Mathematics*, 1971.